6.1.3 Umocňování komplexních čísel

Předpoklady: 6102

Pedagogická poznámka: První příklad je opakování, které známkuji.

Př. 1: Spočti.
a) $i(1+i)(2-i)-(-2+2i)$ b) $(3-i)^2(-1-i)-i^2(1+3i)(2-i)$
c) $(\sqrt{3}-i\sqrt{2})(i\sqrt{2}-\sqrt{2})-i(\sqrt{6}+i\sqrt{6})$

a)
$$i(1+i)(2-i)-(-2+2i)=(i+i^2)(2-i)+2-2i=(i-1)(2-i)+2-2i=$$
$$=2i-i^2-2+i+2-2i=1+i$$
b)
$$(3-i)^2(-1-i)-i^2(1+3i)(2-i)=(9-6i+i^2)(-1-i)+(1+3i)(2-i)=$$
$$=(8-6i)(-1-i)+2-i+6i-3i^2=-8-8i+6i+6i^2+2+5i+3=-9+3i$$
c)
$$(\sqrt{3}-i\sqrt{2})(i\sqrt{2}-\sqrt{2})-i(\sqrt{6}+i\sqrt{6})=i\sqrt{6}-\sqrt{6}-2i^2+2i-i\sqrt{6}-i^2\sqrt{6}=$$
$$=-\sqrt{6}+2+2i+\sqrt{6}=2+2i$$

Sčítání a násobení komplexních čísel má stejné vlastnosti jako u reálných čísel $\Rightarrow$ pro komplexní čísla platí vzorce pro přirozené mocniny (o celočíselných nemluvíme, protože zatím neumíme dělit, a o racionálních mocninách také, protože neumíme odmocňovat).

Př. 2: Doplň následující větu: Pro libovolná komplexní čísla z, z_1, z_2 a všechna přirozená čísla *n*, *m* platí: $z^m \cdot z^n =$, $(z_1 \cdot z_2)^n =$, $(z^m)^n =$.

Pro libovolná komplexní čísla z, z_1, z_2 a všechna přirozená čísla *n*, *m* platí:
$z^m \cdot z^n = z^{m+n}$, $(z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n$, $(z^m)^n = z^{mn}$

Pedagogická poznámka: Pokud se objeví někdo, kdo má se vzorci problém, zaslouží nemilosrdně ztrestat.

Př. 3: Doplň tabulku s mocninami imaginární jednotky *i*. Na základě druhého řádku tabulky zformuluj pravidlo pro co nejjednodušší výpočet libovolné přirozené mocniny *i*.

i	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7	i^8	i^9	i^{10}	i^{11}	i^{12}	i^{13}

i	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7	i^8	i^9	i^{10}	i^{11}	i^{12}	i^{13}

i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i

Z tabulky je vidět, že se stále opakují pouze čtyři hodnoty.
Výsledek záleží na tom, jaký je zbytek exponentu po dělení čtyřmi:

- exponent dělitelný 4 $i^{4k}=1$
- zbytek po dělení exponentu čtyřmi 1 $i^{4k+1}=i$
- zbytek po dělení exponentu čtyřmi 2 $i^{4k+2}=-1$
- zbytek po dělení exponentu čtyřmi 3 $i^{4k+3}=-i$.

Předchozí pravidla se dají snadno dokázat: $i^{4k+1}=\overbrace{\underbrace{i\cdot i\cdot i\cdot i}_{1}\cdot i\cdot\ldots\cdot\underbrace{i\cdot i\cdot i\cdot i}_{1}}^{k\text{ skupin po čtyřech}}\cdot i=i$

Př. 4: Vypočti:
a) i^{20} b) i^{41} c) i^{79} d) $i^3+i^{13}+i^{33}+i^{23}+i^{43}$
e) $i+i^2+i^3+\ldots+i^{50}$

a) $i^{20}=i^{4\cdot 5}=1$ b) $i^{41}=i^{4\cdot 10+1}=i^{4\cdot 10}\cdot i=i$ c) $i^{79}=i^{76}\cdot i^3=-i$
d) $i^3+i^{13}+i^{33}+i^{23}+i^{43}=-i+i+i-i-i=-i$
e) $i+i^2+i^3+\ldots+i^{50}=\underbrace{i+(-1)+(-i)+1}_{0}+i+(-1)+\ldots+\underbrace{i+(-1)+(-i)+1}_{0}+i+(-1)=-1+i$

Zkusíme spočítat pár mocnin z komplexních čísel.

Př. 5: Spočti: a) $(3+2i)^2$ b) $(2-i)^3$ c) $(2+i)^4$

a) $(3+2i)^2=9+12i+4i^2=5+12i$
b) $(2-i)^3=(2-i)^2(2-i)=(4-4i+i^2)(2-i)=(3-4i)(2-i)=6-3i-8i+4i^2=2-11i$
c) $(2+i)^4=\left([2+i]^2\right)^2=(4+4i+i^2)^2=(3+4i)^2=9+24i+16i^2=-7+24i$

Postřeh: Umocňování komplexních čísel má oproti dvojčlenům jednu dobrou vlastnost. Vždy zbude jako výsledek jenom komplexní číslo (dvojčlen) $\Rightarrow$ výraz se umocňováním nekomplikuje.

Př. 6: Vypočti $(1+i)^{16}$. Než zahájíš výpočet, navrhni postup tak, aby byl výpočet co nejjednodušší.

Nebudeme roznásobovat závorky. Vypočteme druhou mocninu výrazu, pak ji umocníme na druhou, výsledek opět umocníme, atd.

$$(1+i)^{16}=\left(\left[\left([1+i]^2\right)^2\right]^2\right)^2=\left(\left[\left(1+2i+i^2\right)^2\right]^2\right)^2=\left(\left[(2i)^2\right]^2\right)^2=\left(\left[4i^2\right]^2\right)^2=\left([-4]^2\right)^2$$

$=(16)^2=256$

Př. 7: Spočti:

a) $3(-1+i)(1-i)-i(2-3i)$

b) $\left[(1+2i)-(3-i)\right](1-i)^2$

c) $(2+3i)^2-(2+3i)(3-2i)+2(3-2i)$

a)

$3(-1+i)(1-i)-i(2-3i)=3(-1+i+i-i^2)-2i+3i^2=3\left[-1+2i-(-1)\right]-2i+3(-1)=$

$3(2i)-2i-3=-3+4i$

b)

$\left[(1+2i)-(3-i)\right](1-i)^2=(1+2i-3+i)(1-2i+i^2)=(3i-2)(1-2i-1)=$

$(3i-2)(-2i)=-6i^2+4i=-6(-1)+4i=6+4i$

c)

$(2+3i)^2-(2+3i)(3-2i)+2(3-2i)=(4+12i+9i^2)-(6-4i+9i-6i^2)+6-4i=$

$=4+12i-9-\left[6+5i-6(-1)\right]+6-4i=1+8i-(12+5i)=-11+3i$

Pedagogická poznámka: Na následující příklad nechávám alespoň pět minut času. Přeruším práci pomalejší části třídy, aby se na něj podívali všichni. Trik s rozdělením rovnice na dvě říkám poměrně brzy.

Př. 8: Najdi reálná čísla *a*, *b* taková, aby platilo: $(1-i)a-(-2+i)b=5-2i$.

$(1-i)a-(-2+i)b=5-2i$ upravíme levou stranu

$a-ia+2b-ib=5-2i$

Obě strany rovnice jsou komplexní čísla $\Rightarrow$ získali jsme jejich rovnost $\Rightarrow$ pokud se mají rovna musí se rovnat jejich reálné i imaginární části $\Rightarrow$ soustava dvou lineárních rovnic o dvou reálných neznámých (už umíme).

$a+2b+i(-a-b)=5-2i$

Reálné části:

$a+2b=5 \Rightarrow a=5-2b$.

Imaginární části:

$-a-b=-2$

$a+b=2 \Rightarrow a=2-b$

Srovnáme obě rovnice: $5-2b=2-b$.

$b=3$

$a=2-b=2-3=-1$

$a=-1$ $b=3$

Pedagogická poznámka: Většina žáků neví, jak předchozí příklad vyřešit, snažím se je vést k tomu, aby si uvědomili, že jde o typickou ukázku situace, kdy při řešení neznámé situace pomůže návrat k naprostým základům (rovnice jako rovnost dvou čísel, rovnost dvou komplexních čísel).

Dodatek: Argumentovat můžeme i takto. $a-ia+2b-ib=5-2i$
Reálná čísla *a*, *b* nemohou nic změnit na tom, kde se vyskytují čísla i $\Rightarrow$ získáváme dvě rovnice:
jednu pro členy bez *i*: $a+2b=5$,
druhou pro členy s *i*: $-ia-ib=-2i$.

Př. 9: Petáková:
strana 135/cvičení 11 b) c)
strana 135/cvičení 12 c) e)
strana 135/cvičení 13 c)

Shrnutí: Umocňování komplexních čísel je jednodušší než umocňování dvojčlenů, kvůli rovnosti $i^2 = -1$ je výsledkem vždy „dvojčlen“.